3.

DISSERTATIO ACADEMICA
DE MODO REDUCENDI DISTANTIAS LUNÆ A STELLIS PRO LONGITUDINE GEOGRAPHICA INVENIENDA,

CUJUS PARTEM PRIOREM,

VENIA AMPLISS. FAC. PHIL. IN ACAD. ABOËNSI,

PUBLICÆ MODESTE SUBJICIUNT CENSURÆ

Mag. HENRICUS JOH. WALBECK,
Docens in Mathesi Applicata,

ET

JOHANNES TULINDBERG,
Stipendiarii publ.
Ostrob.

In Auditorio Phil. die 11 Junii 1817.
horis a. m. consv.

ABOÆ, Typis FRENCKELLIANIS.

§. 1.

Ab illo inde tempore, quo per theoriam gravitatis Newtonianam, ab experientia mirum in modum quotidie fere confirmatam, opera immortalis T. Mayeri adcuratior, quam eousque cognita erat, motuum lunarium theoria indagata fuit, quæ vero jam theoreticis Ill. Laplacii empiricisque Bürgii & Burckhardti disquisitionibus ad summum fere fastigium est exculta, usus invaluit, per distantias Lunæ a stellis, vel fixis vel errantibus, longitudines locorum geographicas, præsertim mari, inveniendi. Problematis hujus utilissimi, quod etiam in terra magno cum fructu usurpari potest, permultæ jam sunt solutiones, quæ tantum non omnes eo nituntur fundamento, ut ex datis lateribus trianguli sphærici, variationeque duorum, invariato manente angulo intercepto, variatum quæratur tertium latus, quod est ipsa Distantia siderum, ab effectu parallaxeos & refractionis purgata. Quod si in calculo nullam sphæroidicitatis telluris habere volueris rationem, quod quidem præsertim in nauticis hujus problematis applicationibus fieri solet, nihil omnino hac in re desideratur, cum problema per se sit facillimum, & variæ jam magis minusve commodæ excogitatæ sint, formulæ directæ trigonometricæ, quæ ipsa quidem calculo logarithmico minus est commoda, transformationes, quæ vel distantiam ipsam correctam, vel correctionem distantiæ observatæ, hancque vel exacte, vel saltem proxime præbeant *a)*. Quo in casu altitudines etiam tam Lunæ quam Stellæ observari solent; quæ deinde refractione & parallaxi corrigantur, ex quibus datis, per formulas laudatas invenitur ipsa distantia geocentrica, quæ cum eadem, e tabulis pro certo quodam fixi meridiani tempore data, collata, differentiam longitudinis facillime præbet. Sed Astronomo in terra lon-

---

a) Invaluit hoc respectu formula Cl. DE BORDA, quæ cum multis aliis exhibita est a Cel. LINDQVIST in Diss. de Inven. Long. Loci ex obs. Distantia Lunæ a Stella quadam; Aboæ 1795. Formula DUNTHORNI satis est concinna: DON JOSEF MENDOZA RIOZ 40 transformationes formulæ trigonometricæ directæ dedit, generalemque expressionem ipsius correctionis ad quantitates secundi ordinis exactam. *Phil. Tr.* 1797. Inter eos, qui de cetero approximantes pro distantiæ correctione formulas tradidere, eminent LEGENDRE & DELAMBRE. *Connaiss. de Tems. XIV.*

longe accuratius observanti, multo commodior evadere potest hæc methodus, cum determinationem altitudinum facilius e tabulis & elementis astronomicis quam ex observationibus depromere possit, unde observationes hujus generis multo faciliores & multiplices reddi possunt; quo in casu etiam effectus sphæroidicitatis telluris calculum ingredi debet. Non quidem negamus, approximatorias etiam facile inveniri posse formulas, quæ parallaxin altitudinis & azimuthi Lunæ hac sub hypothesi adornatas præbeant; sed melius utique est, talem methodum adhibere, quæ rigore geometrico se commendet *b)*, præsertim cum instrumenta, quibus has distantias metimur, paucorum tantum minutorum secundorum jam habeant incertitudinem, quæ etiam repetitis observationibus multo minor reddi potest. Verum quidem est, ob caussas facile perspiciendas, hanc rationem longitudinum inveniendarum inferiorem calculo cum occultationibus

b) Bene omnino Gauss in libro eximio *Theoria mot. Corp. coel.* p. 167: *Male loquuntur, qui methodum aliquam alia* magis minusve exactam *pronunciant. Ea enim sola methodus problema solvisse censeri potest, per quam quemvis præcisionis gradum attingere saltem in potestate est. Quamobrem methodus alia alii eo tantum nomine palmam præripit, quod* eundem *præcisionis gradum per aliam celerius minorique labore, per aliam tardius graviorique opera assequi licet.*

fixarum instituto habendam esse, cum error unius secundi in distantia, duplum fere in Longitudine, tempore numerata, efficiat, sed observandum est, multitudine observationum corrigi posse earum incertitudinem, multoque facilius calculo eas subjici, si solita methodus ex apparente distantia geocentricam inveniendi invertatur, dein vero, si pro tribus saltem, &, quod melius est, æquidistantibus temporis momentis e tabulis ope longitudinis jam proxime notæ computentur apparentes distantiæ, ut etiam veræ, unde earum differentiæ innotescunt, quæ porro ope interpolationis ad quamcunque observatarum distantiarum referantur, qua ratione, si harum numerus major sit, calculus earum facilior, directior & certior evadit. Ubi vero pauci se consequentes habeantur observationes, nulla est ratio ob quam solita methodus deseratur. Posset quidem ex magna serie medium arithmeticum sumi tam temporum quam distantiarum, sed præterquam quod variatio distantiæ non uniformis sit, meliores ac deteriores observationes tunc commiscerentur. Proposuit quidem DE LINDENAU *c*) hoc respectu formulas quasdam, quæ, datis positionibus Lunæ & stellæ, variationem distantiæ præbent, quarum ope quævis observata distantia ad mediam quandam reduci po-

c) *Monatl. Correspondenz*, 1805.

potest; sed etiam ita calculus pro quavis distantia satis prolixus evadit. Præterea solitæ istæ methodi distantiam veram ex apparente & altitudinibus, si ad ellipticitatem telluris respectum habeas, definiendi, magnis laborant difficultatibus; quare optimum nobis visum est, totam hanc rationem deserere, apparentesque positiones non ad horizontem, sed ad æquatorem vel eclipticam referre, unde sequitur, effectum parallaxeos & refractionis respectu harum positionum esse determinandum, quod posterius, præsertim si altitudines non parvæ fuerint, majori præcisione etiam per formulas approximantes effici potest, quam effectus parallaxeos lunaris respectu horizontis more solito determinatur. Loci longitudo, hac in methodo ut in ceteris, quam proxime cognita esse debet; quod si non satis accurate nota fuerit, calculus repetendus est; eritque ad hanc primam determinationem, si loci positio valde incerta sit, unius vel alterius distantiæ præliminaris computatio sufficiens. Cum nullam formulam pro parallaxi & refractione notam supponamus, rem e principiis exponere studebimus. Quod si in materia tam agitata aliquid novi (quod facile concedimus) vix proferre poterimus, speramus tamen, cognitorum principiorum dispositionem & ad rem nostram accommodationem non omni usu fore carituram, mitem de cetero B. Lectorum rogantes juvenilis opusculi censuram.

§. 2.

§. 2.

Ut igitur primum locus lunæ apparens, parallaxi affectus, isque ad æquatorem relatus quæratur, assumantur tria plana se invicem normaliter secantia, per centrum telluris ducta, quæ utique in sphæra cœlesti circulos projicient maximos. Si unum horum sit æquatoris, erunt poli circulorum maximorum ceterorum in æquatore siti, quorum, positivorum, sint rectascensiones N & $N + 90°$; sit præterea lunæ distantia a plano primo Z, a secundo X, & a tertio Y, assumendo Z positivam pro distantia boreali, X & Y positivas versus polos positivos. Assumantur tali etiam modo pro loco observatoris eædem distantiæ z, x, y; sit α Rectascensio lunæ, δ Declinatio, ϱ radius, geocentricæ, α', δ', ϱ' hæ in loco observatoris quantitates apparentes; a Rectascensio Observatoris seu $AR.$ Zenith = $AR.$ medii Cœli seu Tempori Sidereo = $A.$ Rectæ Solis Mediæ + Nutat. in $AR.$ + Tempori Solari medio; p Declinatio Observatoris geocentrica seu declinatio Zenith; R Distantia lunæ a centro telluris, r Distantia observatoris seu radius terrestris, posito a = radio æquatoris & b = semiaxi telluris, erit utique:

$$X = R \cos \delta \cos (\alpha - N)$$
$$Y = R \cos \delta \sin (\alpha - N)$$
$$Z = R \sin \delta$$

$$x = r \cos p \cos (a - N)$$
$$y = r \cos p \sin (a - N)$$
$$z = r \sin p \quad ,$$ habebisque

$$\tang (\alpha - N) = \frac{Y}{X},$$

$$\tang \delta = \frac{Z \cdot \cos (\alpha - N)}{X}$$

$$R = \frac{X}{\cos \delta \cos (\alpha - N)}$$

Quod si jam apparentia loca lunæ quærantur, habebis

$$\tang (\alpha' - N) = \frac{Y - y}{X - x},$$

$$\tang \delta' = \frac{Z - z}{X - x} \cos (\alpha' - N)$$

$$R' = \frac{X - x}{\cos \delta' \cos (\alpha' - N)}$$

Valores antea inventos substituendo, observandoque, quod sit $\sin \varrho' = \frac{R}{R'} \sin \varrho$, erit

$$\tang (\alpha' - N) = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - N) - \frac{r}{R} \cos p \sin (a - N)}{\cos \delta \cos (\alpha - N) - \frac{r}{R} \cos p \cos (a - N)}$$

$\tang \delta' =$

$$\operatorname{tang} \delta' = \frac{(\sin \delta - \frac{r}{R} \sin p) \cos (\alpha' - N)}{\cos \delta \cos (\alpha - N) - \frac{r}{R} \cos p \cos (a - N)}$$

$$\sin \varrho' = \frac{\sin \varrho \cos \delta' \cos (\alpha' - N)}{\cos \delta \cos (\alpha - N) - \frac{r}{R} \cos p \cos (a - N)}$$

Si π est parallaxis lunæ æquatorea, erit $\frac{æ}{R} = \sin \pi$ atque $\frac{r}{R} = \frac{r}{æ} \sin \pi = \sin \pi'$, quo parallaxis loci horizontalis d), ut dici solet, determinatur.

Cum N arbitrarius sit, assumatur primo $N = \alpha$; unde

$$\operatorname{tang} (\alpha' - \alpha) = \frac{- \sin \pi' \cos p \sin (a - \alpha)}{\cos \delta - \sin \pi' \cos p \cos (a - \alpha)}$$

tang δ' =

d) Perspicuum est, hac cum parallaxi horizontali non intelligi eam, quæ in horizonte apparente, polum in Zenith apparente seu in directione normalis habente obtinet, sed eam, quæ in circulo maximo a Zenith vero, in linea observatorem & centrum telluris jungente producta, posito, 90° distante, quem circulum horizontem verum, secundum analogiam ceterarum denominationum, appellamus, locum habet.

$$\text{tang}\,\delta' = \frac{(\sin\delta - \sin\pi' \sin p)\cos(\alpha' - \alpha)}{\cos\delta - \sin\pi' \cos p \cos(a - \alpha)}$$

$$\sin\varrho' = \frac{\sin\varrho \,.\, \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos\delta - \sin\pi' \cos p \cos(a - \alpha)},$$

Vel si ponatur $N = o$, erit

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{\cos\delta \sin\alpha - \sin\pi' \cos p \sin a}{\cos\delta \cos\alpha - \sin\pi' \cos p \cos a}$$

$$\text{tang}\,\delta' = \frac{(\sin\delta - \sin\pi' \sin p)\cos\alpha'}{\cos\delta \cos\alpha - \sin\pi' \cos p \cos a}$$

$$\sin\varrho' = \frac{\sin\varrho \cos\delta' \cos\alpha}{\cos\delta \cos\alpha - \sin\pi' \cos p \cos a},$$

Si est $N = a$, evadit

$$\text{tang}\,(\alpha' - a) = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - a)}{\cos\delta \cos(\alpha - a) - \sin\pi \cos p}$$

$$\text{tang}\,\delta' = \frac{(\sin\delta - \sin\pi' \sin p)\cos(\alpha' - a)}{\cos\delta \cos(\alpha - a) - \sin\pi' \cos p}$$

$$\sin\varrho' = \frac{\sin\varrho \,.\, \cos\delta' \cos(\alpha' - a)}{\cos\delta \cos(\alpha - a) - \sin\pi' \cos p}$$

Ex his formulis, primæ nobis videntur commodissimæ, quippe quæ quinque tantum notis decimalibus in Logarithmis adhibitis, præsertim pro $\alpha' - \alpha$ & ϱ, atque etiam pro δ' nisi magna fuerit lunæ declinatio, ad sufficientem assequendam exactitudi-

 nem

nem adhiberi possunt. Pro sin ϱ & sin ϱ' semper poni potest ϱ & ϱ'.

Si stella, a qua lunæ distantia capta est, errans fuerit, parallaxes AR. & D cl. ope priorum formularum computentur, quo in casu insigniter abbreviari possunt. Pro sole igitur & planetis habebis quam proxime:

$$\alpha' - \alpha = \pi' \frac{\cos p}{\cos \delta} \sin (\alpha - a)$$

$$\tang \delta' = \tang \delta - \frac{\sin \pi' \sin p}{\cos \delta} \text{ seu } \delta' = \delta - \pi' \sin p \cos \delta$$

$$\varrho' = \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} \varrho = \varrho$$

Planeta, qui terræ aliquando proximus esse potest, est Venus, in aphelio & conjunctione inferiori cum terra, hac in perielio existente; cujus distantia hoc in casu est 0,25490 (posita parallaxi Solis pro distantia $1 = 8'',70$) Parallaxis $= 34'',13 = \pi$, atque $\pi^2 = 0'',0056$, unde patet quadrata sinuum parallaxium semper omitti posse.

Ad applicationem harum formularum necesse est, ut p atque $\frac{r}{\mathfrak{a}}$ in hypothesi telluris ellipsoidicæ inveniantur. Si p' = latitudo observata, seu com-

complementum anguli inter normalem & axem revolutionis ellipseos, patet esse tang $p' = -\frac{dx}{dz}$;

tang $p = \frac{z}{x}$;

& per naturam ellipseos $z^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$, unde

$-\frac{dx}{dz} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z}{x}$, Ergo tang $p = \frac{b^2}{a^2} \cdot$ tang p'.

Est porro $r^2 = x^2 + z^2$, unde $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a - (a^2 - b^2) \cos p^2}$,

seu debita instituta reductione

$\frac{r}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 \cos p'^2 + b^4 \sin p'^2}{a^2 \cos p'^2 + b^2 \sin p'^2}}$, quae prout primus fecit Lexell e) contrahi potest in formam notissimam

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{\cos p'}{\cos p \cos (p' - p)}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\sin p'}{\sin p \cos (p' - p)}}$$

Si formula pro p in seriem vertenda, ea ita scribatur:

tang $(p' - u) = \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)$ tang p', eritque differentiando, posita $d\varepsilon$ constante:

$$\frac{du}{\cos (p' - u)^2} = \frac{2\, d\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} \text{ tang } p'$$

---

e) *Astron. Jahrb.* 1776.

$$\frac{d^2u \cos(p'-u)^2 - 2\cos(p'-u)\sin(p'-u)\,du^2}{\cos(p'-u)^4}$$

$$= \frac{-4\,d\,\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^3}\tan p'$$

unde, si valores τῶν u, $\frac{du}{d\varepsilon}$, &c. pro $\varepsilon = 0$ uncis signentur,

$$(u) = 0$$

$$\left(\frac{du}{d\varepsilon}\right) = 2\sin p' \cos p' = \sin 2p'$$

$$\left(\frac{d^2u}{d\varepsilon^2}\right) = -4\sin p' \cos p' + 8\sin p'^3 \cos p' = -\sin 4p';$$

est vero per theorema notissimum si u functio τȣ ε

$$u = (u) + \left(\frac{du}{d\varepsilon}\right)\frac{\varepsilon}{1} + \left(\frac{d^2u}{d\varepsilon^2}\right)\frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

ergo in minutis secundis

$$u = \varepsilon\frac{\sin 2p'}{\sin 1''} - \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{\sin 4p'}{\sin 1''} + \ldots$$

Pro $\frac{b}{a} = \frac{304}{305}$ erit $\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{609}{185441}$

$$u = 677'',39 \sin 2p' - 1'',11 \sin 4p' = p' - p.$$

Si

Si radium serie expressum volueris, nec transformatione ista Lexelliana uti, sumatur formula prima pro $\frac{r}{\alpha}$, quæ etiam ita scribi potest:

$$\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 = \frac{1 - \left(\frac{\alpha^4 - b^4}{\alpha^4}\right) \sin p'^2}{1 - \left(\frac{\alpha^2 - b^2}{\alpha^2}\right) \sin p'^2} \text{; ponendo } 1 - \frac{b^2}{\alpha^2} = e^2$$

ubi e = excentricitas meridiani, habebis

$$\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 = \frac{1 - (2 - e^2)e^2 \sin p'^2}{1 - e^2 \sin p'^2}, \text{ quæ evoluta dat}$$

$$\frac{r}{\alpha} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 (1 - e^2) \sin p'^2 - \tfrac{5}{8} e^4 (1 - e^2)(1 - \tfrac{1}{5} e^2) \sin p'^4 - \ldots$$

seu ulterius transformando, posito

$$\frac{r}{\alpha} = 1 - m \sin p'^2 - n \sin p'^4 \ldots$$

$$\log \frac{r}{\alpha} = - M \left(m \sin p'^2 + \left(n + \frac{m^2}{2}\right) \sin p'^4 \ldots\right)$$

$$M = 0{,}43429448$$

$$\log \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) = \log \sin p'^2 + \log (m + n \sin p'^2 + \ldots)$$

$$= \log \sin p'^2 + \log m + \frac{Mn}{m} \sin p'^2 + \ldots$$

quæ formula calculo facilior numerico est quam videtur, & quatuor figuris absolvi potest. Est enim

sin

$\sin \pi' = \frac{r}{\alpha} \sin \pi$, & satis accurate $\pi - \pi' = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) \pi$ unde facillime correctio parallaxeos invenitur. Pro ellipticitate telluris $\frac{1}{305}$ est

$$\frac{r}{\alpha} = 1 - 0{,}0032519 \sin p'^2 - 0{,}0000266 \sin p'^4 - \ldots$$

$$\log \frac{r}{\alpha} = 10 - 0{,}0014123 \sin p'^2 - 0{,}0000138 \sin p'^4 - \ldots$$

$$\log\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) = \log \sin p'^2 + 7{,}51214 + 0{,}00355 \sin p'^2 + \ldots$$

§. 3.

Inventis sic, quæ e parallaxi oriuntur ad loca lunæ & etiam stellæ, si opus fuerit, correctionibus, necesse est, ut etiam effectus refractionis in A. Rectam & Declinationem positioni earum apparenti applicentur. Altitudo igitur harum quæratur, quæ refractionem in altitudine suppeditat, deinde in refractionem ascensionis r. & declinationis mutandam. Vel nobis non monentibus patet, refractionem, nisi magna fuerit altitudo, ope barometri & thermometri esse corrigendam, cum variatio quæ ex mutata densitate aëris oritur, in nostris præsertim climatibus temporeque hiemali sæpe ultra decimam partem refractionis mediæ ascendere possit.

Ma-

Magnum operis compendium inde oritur, quod totus hic pro refractione calculus, minoribus tabulis logarithmicis ad quinque vel quatuor notas decimales extensas, omni necessaria cum præcisione absolvi queat *f*).

Sit Distantia Lunæ (vel Stellæ) a Zenith apparenti, quod cum latitudine loci astronomica p' cohæret (ubi quidem non valde magnus oritur error si p pro p' substituas) $= z$, Angulus inter declinationis circulum & Verticalem v, a quibusdam angulus variationis vulgo parallacticus appellatus; Lunæ (vel stellæ) declinatio & Ascensio recta visa δ'' & α'', erit angulus horarius apparens $\alpha' - a$, ad orientem positiva, atque

$$\cos z = \cos(\alpha' - a) \cos \delta' \cos p' + \sin \delta' \sin p'$$

$$\operatorname{tang} v = \frac{\sin(\alpha' - a)}{\cos \delta' \operatorname{tang} p' - \sin \delta' \cos(\alpha' - a)}$$

seu, quod præsertim heic multo expeditius est,

posito $\operatorname{tang} \phi = \dfrac{\operatorname{tang} p'}{\cos(\alpha' - a)}$, erit

cos z =

f) Si rigorose calculaveris, refractio non pro Centro Lunæ sed puncto Limbi quo distantia capitur sumenda est. Inutile vero est, calculum talibus minutiis molestum reddere, quæ præterea, nisi sit Luna vel Sol horizonti proximus nullius sunt momenti. Ex hac etiam caussa minimæ altitudines evitari debent.

$$\cos z = \frac{\cos(\varphi - \delta')\sin p'}{\sin \varphi}, \quad \operatorname{tang} v = -\frac{\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha)\cos\varphi}{\sin(\varphi - \delta')}$$

eritque sumtis differentialibus

$$\mathrm{d}(\alpha' - \alpha) = \mathrm{d}\alpha' = \frac{\mathrm{d}z \,.\, \sin v}{\cos \delta'}, \quad \mathrm{d}\delta' = -\mathrm{d}z \,.\, \cos v, \text{ seu}$$

si (ϱ) est refractio in altitudine $90° - z$, *g*) erit quam proxime

$$\alpha'' - \alpha' = -(\varrho)\frac{\sin v}{\cos \delta'}, \quad \delta'' - \delta' = (\varrho)\cos v.$$

Formulas has semper, nisi parva fuerit stellæ altitudo, adhiberi posse, inde patet, quod exactæ differentiæ ita definiantur:

$$\sin \Delta\alpha' = \frac{\sin \Delta z \,.\, \sin v}{\cos(\delta' - \Delta\delta')} = \frac{\sin \Delta z \,.\, \sin(v + \Delta v)}{\cos \delta'}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\delta = -\frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta z \,.\, \cos(v + \tfrac{1}{2}\Delta v)}{\cos \tfrac{1}{2}\Delta v}$$

seu, si placet

$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta\delta = -\left(\frac{\cos \tfrac{1}{2}\Delta z \sin p' - \sin\delta' \cos(z + \tfrac{1}{2}\Delta z)}{\sin z \cos(\delta' - \tfrac{1}{2}\Delta\delta)}\right)\sin \tfrac{1}{2}\Delta z$$

Si

---

g) Cum solitæ refractionis tabulæ argumenti loco habeant distantiam zenithalem vel altitudinem apparentem (hoc loco visam) patet, refractionem pro altitudine vera (h. l. apparenti) duplici approximatione, spectando primum apparentem pro vera, quærendam esse.

Si quando necessarium foret, his exactis formulis uti, substitui heic potest pro Δv, dv, ubi

$$dv = -\frac{dz \, . \sin v}{\cot \delta'} = (\varrho) \frac{\sin v}{\cot \delta'} .$$

Demonstratio harum formularum inveniri potest, si consideretur triangulum istud, quod differentia est inter triangulum angulos suos habens in Zenith apparente, Polo, & loco Stellæ apparente, atque triangulum variatum, ubi anguli sunt ad polum, Zenith & locum stellæ visum seu refractione affectum, collatisque inter se angulis & lateribus in triangulo hoc excedente, a distantia polari apparente & visa & arcu refractionis formato *h*).

Nulla difficultas inde oritur, quod $\Delta\delta$, Δv in altero membro occurrant. Quod si his non uti volueris, haud difficulter ope Theorematis Tayloriani veræ hæ variationes inveniri possunt; est enim

$$\Delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{dz} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{d^2\alpha'}{dz^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{1 \, . \, 2} + \ldots$$

$$\Delta\delta' = \frac{d\delta'}{dz} \, \frac{\Delta z}{1} + \frac{d^2\delta'}{dz^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{1 \, . \, 2} + \ldots$$ ubi coëfficientes

h) Vide de cetero *Trigonometrie par* CAGNOLI *Paris*, 1786 § *541* & *550 sq.* ubi generales pro variationibus triangulorum sphæricorum traditæ sunt formulæ, earumque demonstrationes.

entes, positis, ut antea, p' atque azimutho constantibus, determinari possent. Nobis vero priores æquationes commodiores videntur.

§ 4.

Applicatis sic ad AR. & Decl. geocentricam lunæ & stellæ correctionibus, quæ a parallaxi & refractione oriuntur, habebitur earum positio visa, unde igitur apparens distantia centrorum per resolutionem trianguli sphærici, ubi data sunt duo latera seu complementa declinationum, atque angulus interceptus seu differentia Ascensionum rectarum visarum, facillime invenitur. Est enim, si Δ' Distantia visa, Δ distantia vera

$$\cos\Delta' = \cos(\alpha''_{☾} - \alpha''_{*}) \cos\delta'_{☾} \cos\delta''_{*} + \sin\delta'_{☾} \sin\delta''_{*}$$

$$\cos\Delta = \cos(\alpha_{☾} - \alpha_{*}) \cos\delta_{☾} \cos\delta_{*} + \sin\delta_{☾} \sin\delta_{*}$$

quæ æquationes facilius in forma qua sunt, quam adhibitis angulis auxiliaribus, usitatis tabulis trigonometricis & logarithmicis adhiberi possunt. Partes enim proportionales facilius secundum constructionem solitam tabularum pro numeris quam pro functionibus trigonometricis inveniri possunt. — In usum vero vocandæ sunt hæ formulæ, quando Δ' & Δ non multum a 90° differant; pro angulis minoribus ita transformentur, ut sit

Sin

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta'^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta''_{☾} - \delta''_{*})^2 +$$
$$+ \sin \tfrac{1}{2} (\alpha''_{☾} - \alpha''_{*})^2 \cos \delta''_{☾} \cos \delta''_{*}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta_{☾} - \delta_{*})^2 +$$
$$+ \sin \tfrac{1}{2} (\alpha_{☾} - \alpha_{*})^2 \cos \delta_{☾} \cos \delta_{*}$$

Cum pro distantiis 90° longe excedentibus neutra harum formularum solitis trigonometricis tabulis debita præcisione adhiberi possit, juvat transformationem earum afferre, quæ in omni casu utilis erit, cum arcus semper maxima præcisione per tangentem definiatur:

$$\tan \tfrac{1}{2} \Delta'^2 =$$
$$= \frac{\sin \tfrac{1}{2} (\delta''_{☾} - \delta''_{*})^2 + \sin \tfrac{1}{2} (\alpha''_{☾} - \alpha''_{*})^2 \cos \delta''_{☾} \cos \delta''_{*}}{\cos \tfrac{1}{2} (\delta''_{☾} - \delta''_{*})^2 - \sin \tfrac{1}{2} (\alpha''_{☾} - \alpha''_{*})^2 \cos \delta''_{☾} \cos \delta''_{*}}$$

$$\tan \tfrac{1}{2} \Delta^2 =$$
$$= \frac{\sin \tfrac{1}{2} (\delta_{☾} - \delta^{*})^2 + \sin \tfrac{1}{2} (\alpha_{☾} - \alpha_{*})^2 \cos \delta_{☾} \cos \delta_{*}}{\cos \tfrac{1}{2} (\delta_{☾} - \delta_{*})^2 - \sin \tfrac{1}{2} (\alpha_{☾} - \alpha_{*})^2 \cos \delta_{☾} \cos \delta_{*}}$$

Addita vel demta distantiæ centrorum apparenti summa vel differentia semidiametrorum lunæ & stellæ (diam. fixæ = 0) innotescit differentia inter distantiam visam limborum & veram centrorum, nullis calculi elementis ex observationibus sumtis. Computetur pro tribus (quod semper sufficiens erit) æquabili intervallo a se remotis momentis temporis meridiani tabularum seu fixi, cum longitudine loci jam præterpropter cognita, etiam ad hujus tempus reductis, hæc differentia inter distantiam visam limborum & geocentricam centrorum, sintque hæ differentiæ = w_1 w_2 w_3 pro temporibus loci, quo observatur t_1 t_2 t_3, assumaturque hæc forma

$$w = A + Bt + Ct^2 \text{ ubi erit}$$
$$w_1 = A + Bt_1 + Ct_1^2$$
$$w_2 = A + Bt_2 + Ct_2^2$$
$$w_3 = A + Bt_3 + Ct_3^2,$$

debitaque eliminatione instituta,

$$C = \frac{w_1(t_3 - t_2) - w_2(t_3 - t_1) + w_3(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$B = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1} - C(t_2 + t_1)$$

$$A = w_1 - t_1(B + t_1 C)$$

Si quatuor terminis aliquando necesse fuerit uti, calculus numericus analogæ formulæ satis prolixus foret, quare hoc in casu substitui potest

pro t_1 t_2 t_3 t_4, 0, 1, 2, 3,

atque pro w_1 w_2 w_3 w_4, 0 u_1 u_2 u_3

ubi constantes facile definiri possunt.

Substitutis in æquatione generali $w = A + Bt + Ct^2$ singulis valoribus τῶν t, invenitur tali modo pro quavis observatione, reductio distantiæ mensuratæ lim-